

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2020 - 2021

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất: 25/12/2020

Bài 1 (5,0 điểm)

Cho dãy số thực (x_n) có $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ và $x_{n+1} = 3x_n^2 - 2nx_n^3$ với mọi $n \geq 1$.

- Chứng minh $\lim x_n = 0$.
- Với mỗi $n \geq 1$ đặt $y_n = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n$. Chứng minh rằng dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (5,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)f(y) = f(xy-1) + xf(y) + yf(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3 (5,0 điểm)

Cho tam giác nhọn không cân ABC có trực tâm H và D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C . Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF với tâm I và K, J lần lượt là trung điểm BC, EF . Cho HJ cắt lại (I) tại G , GK cắt lại (I) tại L .

- Chứng minh rằng AL vuông góc với EF .
- Cho AL cắt EF tại M , IM cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác IEF tại N , DN cắt AB, AC lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng PE, QF, AK đồng quy.

Bài 4 (5,0 điểm)

Với số nguyên $n \geq 2$, gọi $s(n)$ là tổng các số nguyên dương không vượt quá n và không nguyên tố cùng nhau với n .

- Chứng minh $s(n) = \frac{n}{2}(n+1 - \varphi(n))$, trong đó $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n .
- Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên $n \geq 2$ thỏa mãn $s(n) = s(n+2021)$.

----- HẾT -----

* Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

* Giám thị không giải thích gì thêm.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2020 - 2021

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai: 26/12/2020

Bài 5 (6,0 điểm)

Cho đa thức $P(x) = a_{21}x^{21} + a_{20}x^{20} + \dots + a_1x + a_0$ có các hệ số thuộc $[1011, 2021]$. Biết rằng $P(x)$ có nghiệm nguyên và c là một số dương sao cho $|a_{k+2} - a_k| \leq c$ với mọi $k \in \{0, 1, \dots, 19\}$.

✓ a) Chứng minh rằng $P(x)$ có đúng một nghiệm nguyên.

b) Chứng minh $\sum_{k=0}^{10} (a_{2k+1} - a_{2k})^2 \leq 440c^2$.

✓ **Bài 6 (7,0 điểm)**

Một học sinh chia tất cả 30 viên bi vào 5 cái hộp được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 (sau khi chia có thể có hộp không có viên bi nào).

a) Hỏi có bao nhiêu cách chia các viên bi vào các hộp (hai cách chia là khác nhau nếu có một hộp có số bi trong hai cách chia là khác nhau)?

b) Sau khi chia, học sinh này sơn 30 viên bi đó bởi một số màu (mỗi viên được sơn đúng một màu, một màu có thể sơn cho nhiều viên bi), sao cho không có 2 viên bi nào trong cùng một hộp có màu giống nhau và từ 2 hộp bất kì không thể chọn ra được 8 viên bi được sơn bởi 4 màu. Chứng minh rằng với mọi cách chia, học sinh đều phải dùng không ít hơn 10 màu để sơn bi.

c) Hãy chỉ ra một cách chia sao cho với đúng 10 màu học sinh có thể sơn bi thỏa mãn các điều kiện ở câu b).

Bài 7 (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D là giao điểm hai tiếp tuyến của (O) tại B và C . Đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại B cắt trung tuyến đi qua A của tam giác ABC tại G . Cho BG, CG lần lượt cắt CD, BD tại E, F .

✓ a) Đường thẳng đi qua trung điểm của BE và CF lần lượt cắt BF, CE tại M, N . Chứng minh rằng các điểm A, D, M, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Cho AD, AG lần lượt cắt lại đường tròn ngoại tiếp các tam giác DBC, GBC tại H, K . Trung trực của HK, HE, HF lần lượt cắt BC, CA, AB tại R, P, Q . Chứng minh rằng các điểm R, P, Q thẳng hàng.

----- HẾT -----

* Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

* Giám thị không giải thích gì thêm.